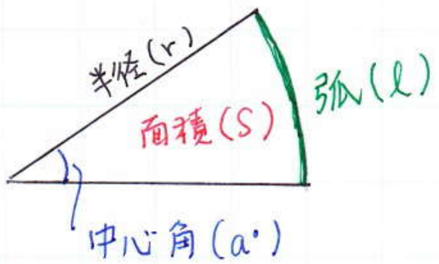
6章 空間図形

6-2 柱体の表面積・体積

おうぎ形

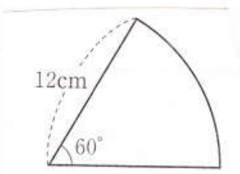


公式　おうぎ形の半径をr，中心角をa°，
円周率をπとするとき

弧の長さ　$\ell = \underbrace{2\pi r}_{円周} \times \underbrace{\frac{a}{360}}_{}$ ↳円の中心角

面積　$S = \underbrace{\pi r^2}_{円の面積} \times \frac{a}{360}$

〈例1〉
右のおうぎ形の弧の長さと
面積を求めましょう.



公式にあてはめましょう.

半径　$r = 12$　，　中心角　$a = 60$　を代入

$\ell = \underbrace{2\pi \times \boxed{\quad}}_{円周の長さ} \times \boxed{\quad}$ → 約分すると $\frac{1}{6}$
つまり 円の $\frac{1}{6}$ の大きさ

↙計算すると

$= \boxed{\quad}$

弧の長さ　4π (cm)

$S = \underbrace{\pi \times 12^2}_{円の面積} \times \frac{60}{360} = 24\pi$

面積　24π (cm²)

＊おうぎの面積は

$S = \frac{1}{2}\ell r$ でも求められます.

これを使うと

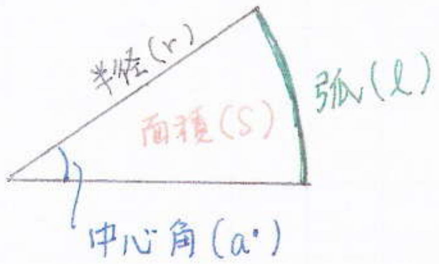
$S = \frac{1}{2} \times \boxed{\quad} \times \boxed{\quad} = 24\pi$

↑弧の長さ　↑半径

6章 空間図形

6-2 柱体の表面積・体積

◎ おうぎ形



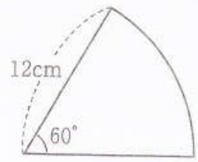
公式 おうぎ形の半径をr，中心角をa°，円周率をπとするとき

弧の長さ $\ell = \underbrace{2\pi r}_{\text{円周}} \times \frac{a}{\underbrace{360}_{\to\text{円の中心角}}}$

面積 $S = \underbrace{\pi r^2}_{\text{円の面積}} \times \frac{a}{360}$

〈例1〉

右のおうぎ形の弧の長さと面積を求めましょう。



公式にあてはめましょう。

半径 $r = 12$，中心角 $a = 60$ を代入

$\ell = \underbrace{2\pi \times \boxed{12}}_{\text{円周の長さ}} \times \boxed{\frac{60}{360}}$ → 約分すると $\frac{1}{6}$ つまり円の $\frac{1}{6}$ の大きさ

計算すると

$= \boxed{4\pi}$

弧の長さ 4π (cm)

$S = \underbrace{\pi \times 12^2}_{\text{円の面積}} \times \frac{60}{360} = 24\pi$

面積 24π (cm²)

＊おうぎの面積は

$S = \frac{1}{2}\ell r$ でも求められます。

これを使うと

$S = \frac{1}{2} \times \underbrace{\boxed{4\pi}}_{\uparrow\text{弧の長さ}} \times \underbrace{\boxed{12}}_{\uparrow\text{半径}} = 24\pi$

問1 半径が6cm，中心角が120°であるおうぎ形の弧の長さと面積を求めましょう

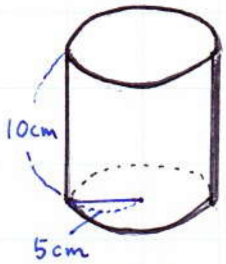
柱体

〈例2〉

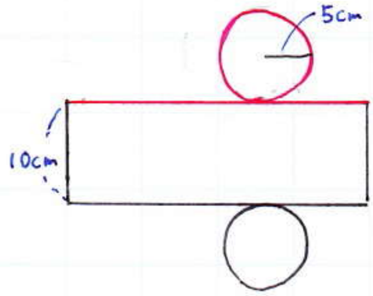
底面の半径が5cm，高さが10cmの円柱がある.

(1) 表面積を求めましょう.

(2) 体積を求めましょう.



(1) 立体のすべての面の面積の和を**表面積**といい，側面全体の面積を**側面積**，1つの底面の面積を**底面積**といいます.
表面積を求めるには，展開図をかくと，わかりやすくなります.



側面は長方形で縦が10cmです.
横の長さは底面の円周と等しいので

側面積 … $10 \times \boxed{\quad} = 100\pi$

↑半径5cmの円周（$2\pi r$に代入）

底面積 … $\underbrace{\pi \times 5^2}_{\pi r^2} = 25\pi$

したがって 表面積は $\underbrace{\boxed{\quad}}_{\text{側面積}} + \underbrace{\boxed{\quad}}_{\text{底面積}} \underbrace{\times 2}_{\text{2つ分}} = \boxed{\quad}$ (cm^2)

(2) 柱体の体積は すべて（底面積）×（高さ）で求まります.

したがって 体積は $\underbrace{\boxed{\quad}}_{\text{底面積}} \times \underbrace{\boxed{\quad}}_{\text{高さ}} = \boxed{\quad}$ (cm^3)

問1 半径が 6cm，中心角が 120° である おうぎ形の弧の長さと面積を求めましょう

$l = 2\pi \times 6 \times \frac{120}{360} = 12\pi \times \frac{1}{3} = 4\pi$

$S = 2\pi \times 6^2 \times \frac{1}{3} = 24\pi$

弧…4π(cm) 面積…24π(cm²)

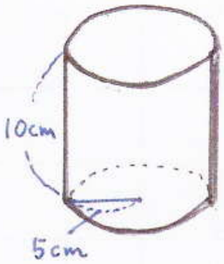
柱体

〈例2〉

底面の半径が 5cm，高さが 10cm の円柱がある．

(1) 表面積を求めましょう．

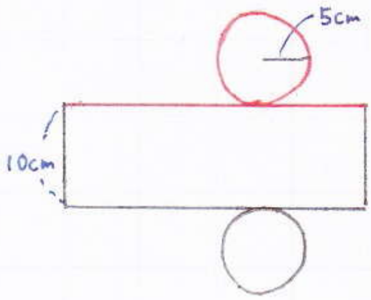
(2) 体積を求めましょう．



(1) 立体のすべての面の面積の和を表面積といい，

側面全体の面積を側面積，1つの底面の面積を底面積といいます．

表面積を求めるには，展開図をかくと，わかりやすくなります．



側面は長方形で縦が 10cm です．
横の長さは底面の円周と等しいので

側面積… $10 \times \boxed{10\pi} = 100\pi$

↑半径5cmの円周（2πrにあてはめる）

底面積… $\underbrace{\pi \times 5^2}_{\pi r^2} = 25\pi$

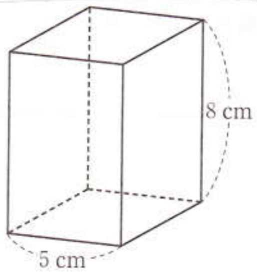
したがって 表面積は $\underbrace{\boxed{100\pi}}_{側面積} + \underbrace{\boxed{25\pi}}_{底面積} \underbrace{\times 2}_{2つ分} = \boxed{150\pi}$ (cm²)

(2) 柱体の体積はすべて（底面積）×（高さ）で求まります．

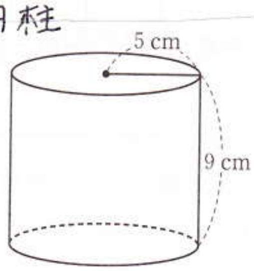
したがって 体積は $\underbrace{\boxed{25\pi}}_{底面積} \times \underbrace{\boxed{10}}_{高さ} = \boxed{250\pi}$ (cm³)

問2 次の立体の表面積と体積を求めましょう.

(1) 正四角柱

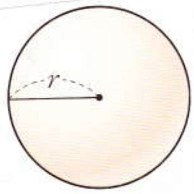


(2) 円柱



球

半径 r の球の体積 V, 表面積 S
を求める公式



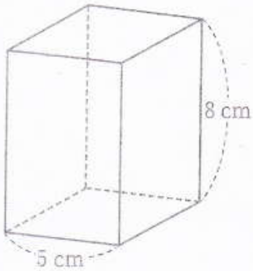
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$

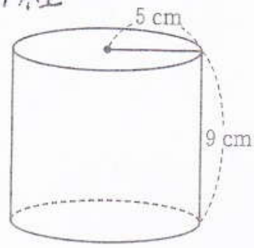
問3 半径 3 cm の球の体積と表面積を求めましょう.

問2 次の立体の表面積と体積を求めましょう。

(1) 正四角柱



(2) 円柱



(1)

(表面積)

$25 \times 2 + 8 \times 5 \times 4 = 210$

(体積)

$25 \times 8 = 200$

$210\,(cm^2),\ 200\,(cm^3)$

(2)

(表面積)

$25\pi \times 2 + 10\pi \times 9$

$= 50\pi + 90\pi = 140\pi$

(体積) $25\pi \times 9 = 225\pi$

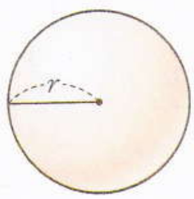
$140\pi\,(cm^2),\ 225\pi\,(cm^3)$

球

半径 r の球の体積 V, 表面積 S を求める公式

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$S = 4\pi r^2$$



問3 半径3cmの球の体積と表面積を求めましょう。

体積 $\frac{4}{3} \times \pi \times 3 \times 3 \times 3 = 36\pi\ (cm^3)$

表面積 $4 \times \pi \times 3 \times 3 = 36\pi\ (cm^2)$

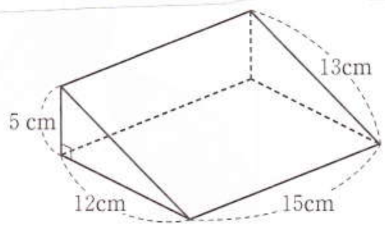
補充問題A

1. 次のおうぎ形の弧の長さと面積を求めなさい。

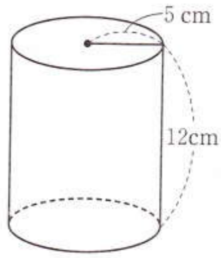
(1) 半径 5 cm, 中心角 90°　(2) 半径 4 cm, 中心角 135°

2. 次の立体の表面積と体積を求めなさい。

(1) 三角柱



(2) 円柱



3. 半径 12 cm の球の表面積と体積を求めなさい。

補充問題A

1. 次のおうぎ形の弧の長さと面積を求めなさい。

(1) 半径 5cm，中心角 90°

$l = 2\pi \times 5 \times \frac{90}{360}$

$= 10\pi \times \frac{1}{4} = \frac{5}{2}\pi$

$S = \pi \times 5^2 \times \frac{1}{4}$

$= \frac{25}{4}\pi$

$\frac{5}{2}\pi$ (cm)，$\frac{25}{4}\pi$ (cm^2)

(2) 半径 4cm，中心角 135°

$l = 2\pi \times 4 \times \frac{135}{360}$

$= 8\pi \times \frac{3}{8} = 3\pi$

$S = \pi \times 4^2 \times \frac{3}{8}$

$= 16\pi \times \frac{3}{8} = 6\pi$

3π (cm)，6π (cm^2)

2. 次の立体の表面積と体積を求めなさい。

(1) 三角柱

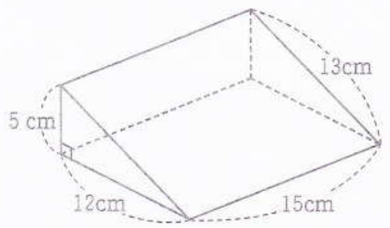


表 $12 \times 5 \times \frac{1}{2} \times 2 + 15 \times (5 + 12 + 13)$

$= 60 + 450 = 510$

体 $12 \times 5 \times \frac{1}{2} \times 15$

$= 450$

510 (cm^2)，450 (cm^3)

(2) 円柱

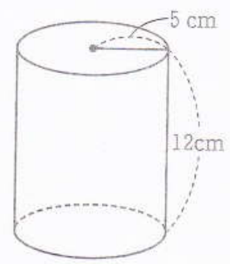


表 $25\pi \times 2 + 10\pi \times 12$

$= 50\pi + 120\pi = 170\pi$

体 $25\pi \times 12 = 300\pi$

170π (cm^2)，300π (cm^3)

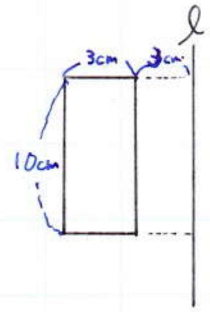
3. 半径 12cm の球の表面積と体積を求めなさい。

表 $4\pi \times 12 \times 12 = 576\pi$ (cm^2)

体 $\frac{4}{3}\pi \times 12 \times 12 \times 12 = 2304\pi$ (cm^3)

補充問題 B

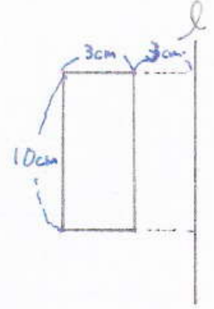
1. 右の図形を、直線ℓを軸に回転させたときにできる立体の表面積と体積を求めなさい。



2. 面積が30π cm²で、半径が12cmのおうぎ形の中心角と弧の長さを求めなさい。

補充問題B

1. 右の図形を，直線 ℓ を軸に回転させたときにできる立体の表面積と体積を求めなさい。



底面は $36\pi - 9\pi = 25\pi$

小さい方の側面積は $6\pi \times 10 = 60\pi$

大きい方の側面積は $12\pi \times 10 = 120\pi$

(表) $25\pi \times 2 + 60\pi + 120\pi = \underline{230\pi\ (cm^2)}$

(体) $25\pi \times 10 = \underline{250\pi\ (cm^3)}$

または $36\pi \times 10 - 9\pi \times 10$ で求める。

2. 面積が $30\pi\ cm^2$ で，半径が12cmのおうぎ形の中心角と弧の長さを求めなさい。

$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$ に代入

$30\pi = \pi \times 12^2 \times \frac{a}{360}$ ← 入れて，π でわる

$144 \times \frac{a}{360} = 30$ $\quad \frac{2}{5}a = 30 \quad a = 30 \times \frac{5}{2} = 75$

$\ell = 2\pi r \times \frac{a}{360}$ より

$\ell = 2\pi \times 12 \times \frac{75}{360}$

$= 24\pi \times \frac{5}{24} = 5\pi$

または $S = \frac{1}{2}\ell r$ より

$30\pi = \frac{1}{2} \times \ell \times 12$

$6\ell = 30\pi$

$\ell = 5\pi$

中心角 75°，弧の長さ 5π (cm)