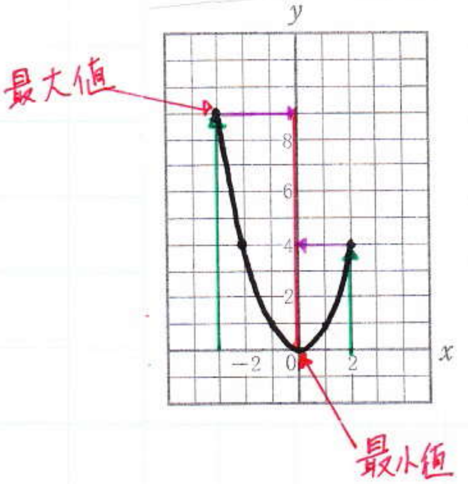
4章 関数 $y=ax^2$

4-2 変域/変化の割合

● 変域



$y=x^2$ のグラフで

x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき

y の変域は

$x=0$ のとき最小値 0

$x=-3$ のとき最大値 9

したがって y の変域は

$0 \leqq y \leqq 9$

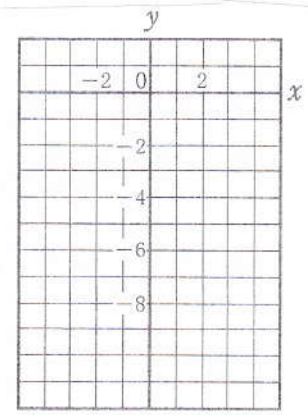
ここに注意！

× $4 \leqq y \leqq 9$

$-3 \leqq x \leqq -1$ の場合の y の変域は

$x=-1$ のとき 最小値 1, $x=-3$ のとき最大値9 なので $1 \leqq y \leqq 9$

◀例1▶ $y=-x^2$ のグラフで, x の変域が次のときの y の変域を, グラフをかいて求めなさい.



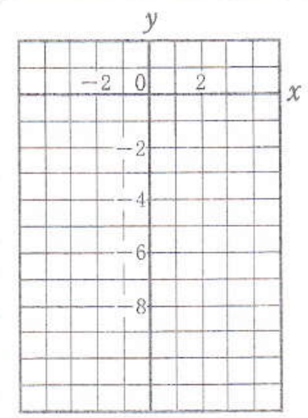
(1) $1 \leqq x \leqq 3$

x	1	2	3
y	-1	-4	-9

(　　) $\leqq y \leqq$ (　　)

最小値　　最大値

(2) $-1 \leqq x \leqq 3$



x	-1	0	1	2	3
y	-1	0	-1	-4	-9

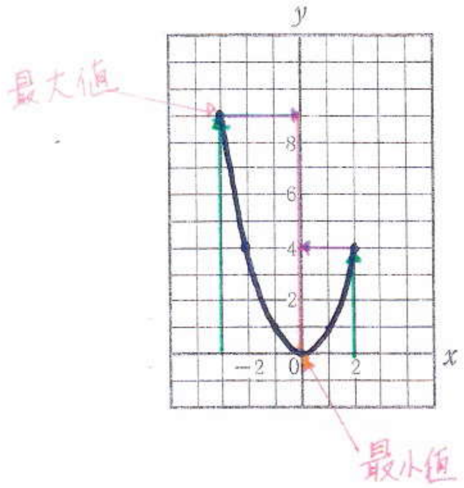
(　　) $\leqq y \leqq$ (　　)

ここに注意

4章 関数 $y=ax^2$

4-2 変域/変化の割合

● 変域



$y=x^2$のグラフで

xの変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき

yの変域は

$x=0$ のとき最小値 0

$x=-3$ のとき最大値 9

したがって yの変域は

$0 \leqq y \leqq 9$

ここに注意！

× $4 \leqq y \leqq 9$

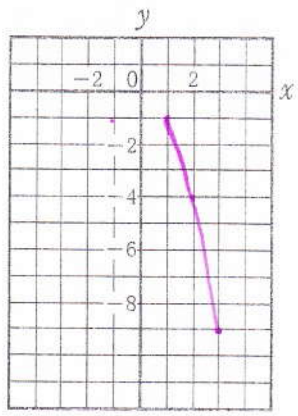
$-3 \leqq x \leqq -1$ の場合の yの変域は

$x=-1$のとき最小値 1, $x=-3$のとき最大値9 なので $1 \leqq y \leqq 9$

◀例1▶ $y=-x^2$のグラフで, xの変域が次のときの yの変域を, グラフをかいて求めなさい。

(1) $1 \leqq x \leqq 3$

x	1	2	3
y	−1	−4	−9

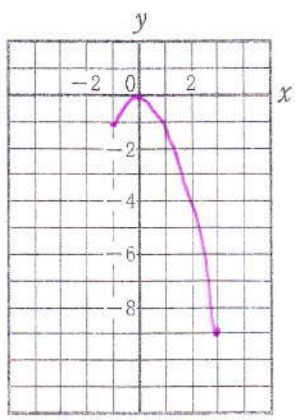


$(-9) \leqq y \leqq (-1)$

最小値　最大値

(2) $-1 \leqq x \leqq 3$

x	−1	0	1	2	3
y	−1	0	−1	−4	−9



$(-9) \leqq y \leqq (0)$

ここに注意

変域の問題では，グラフの略図でよいので必ずグラフをかいて考えましょう。
原点を通るかどうか，最小値・最大値に注意しましょう。

$\boxed{1}$ $y=2x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 3$　　(2) $-2 \leqq x \leqq 3$　　(3) $-3 \leqq x \leqq 1$

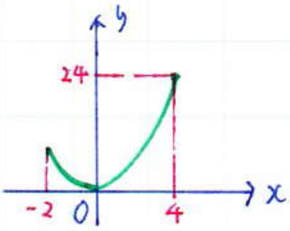
$\boxed{2}$ $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

(1) $-6 \leqq x \leqq -2$　　(2) $-4 \leqq x \leqq 2$

数3-4-2(4)

◀例2▶ $y=ax^2$ で x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき
y の変域は $0 \leqq y \leqq 24$ である。a の値を求めなさい。

y の値から $a>0$（上に開いたグラフ）であることがわかりますね。



$0 \leqq y \leqq \underline{24}$

原点

最大値 24 は $x=4$ のとき

$y=ax^2$ に $x=4$，$y=24$ を代入して
a を求めましょう。

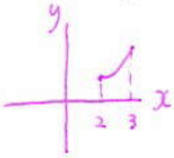
(答)

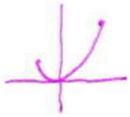
$\boxed{3}$ $y=ax^2$ で x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき y の変域は $-8 \leqq y \leqq 0$
である。a の値を求めなさい。

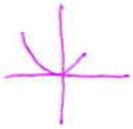
変域の問題では，グラフの略図でよいので 必ずグラフをかいて考えましょう。
原点を通るかどうか，最小値・最大値 に注意しましょう。

$\boxed{1}$ $y=2x^2$について，xの変域が次のときの yの変域を求めなさい。

(1) $2 \leqq x \leqq 3$　(2) $-2 \leqq x \leqq 3$　(3) $-3 \leqq x \leqq 1$







$8 \leqq y \leqq 18$　$0 \leqq y \leqq 18$　$0 \leqq y \leqq 18$

$\boxed{2}$ $y=-\frac{1}{2}x^2$について，xの変域が次のときの yの変域を求めなさい。

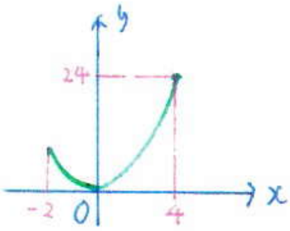
(1) $-6 \leqq x \leqq -2$　(2) $-4 \leqq x \leqq 2$

$-18 \leqq y \leqq -2$　$-8 \leqq y \leqq 0$

数3-4-2(4)

◀例2▶ $y=ax^2$で xの変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき
yの変域は $0 \leqq y \leqq 24$ である。aの値を求めなさい。

yの値から $a>0$（上に開いたグラフ）であることがわかりますね。



$0 \leqq y \leqq 24$

原点

最大値 24 は $x=4$ のとき

$y=ax^2$ に $x=4$，$y=24$ を代入して
aを求めましょう。

$24=a\times4^2$
$16a=24$　$a=\frac{3}{2}$　（答）$a=\frac{3}{2}$

$\boxed{3}$ $y=ax^2$で xの変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき yの変域は $-8 \leqq y \leqq 0$
である。aの値を求めなさい。　$x=-2$，$y=-8$

$-8=a\times(-2)^2$
$4a=-8$　$a=-2$

◉ 変化の割合

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$$

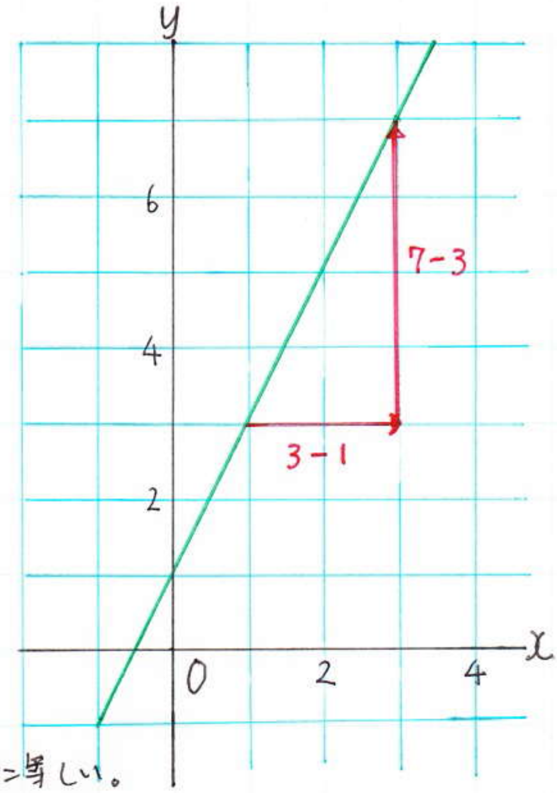
1次関数 $y=ax+b$ で復習しましょう.

* $y=2x+1$ で, xの値が
1から3まで増加するときの
変化の割合を求めなさい。

xの増加量は (　　)
yの増加量は (　　)

したがって 変化の割合は

$$\frac{4}{2} = (\quad)$$



1次関数 $y=ax+b$ では, 変化の割合は
xの値がどの値からどの値に増加しても一定で a に等しい。

◀例3▶

$y=2x^2$ で, xの値が1から3まで増加するときの
変化の割合を求めなさい。

(解答) 右の表をうめてから解きましょう

$\langle y=2x^2 \rangle$

x	···	1	···	3	···
y	···	2	···	(　)	···

xの増加量は

$$3-1=(\quad)$$

yの増加量は

$$(\quad)-2=(\quad)$$

したがって 変化の割合は

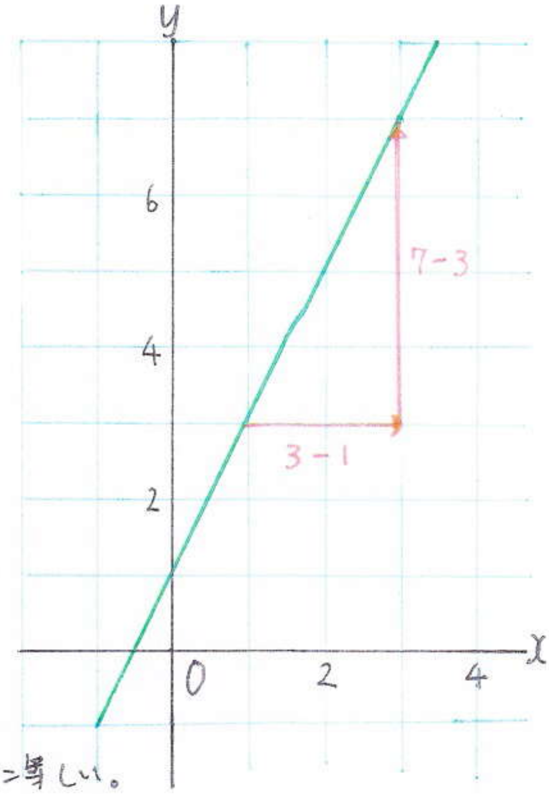
$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{[\quad]}{[\quad]} = [\quad]$$

- $y=2x^2$ で xの値が2から4まで増加するときはどうか?

x	2	4
y		

変化の割合

$$(\text{変化の割合}) = \frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$$



1次関数 $y=ax+b$ で復習しましょう.

* $y=2x+1$ で, x の値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

x の増加量は (2)

y の増加量は (4)

したがって 変化の割合は

$$\frac{4}{2} = (2)$$

1次関数 $y=ax+b$ では, 変化の割合は x の値がどの値からどの値に増加しても一定で a に等しい。

◀例3▶

$y=2x^2$ で, x の値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(解答) 右の表をうめてから解きましょう

〈$y=2x^2$〉

x	…	1	…	3	…
y	…	2	…	(18)	…

x の増加量は

$$3-1=(2)$$

y の増加量は

$$(18)-2=(16)$$

したがって 変化の割合は

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{[16]}{[2]} = [\ 8\ ]$$

- $y=2x^2$ で x の値が2から4まで増加するときはどうか?

x	2	4
y	8	32

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{32-8}{4-2} = \frac{24}{2} = 12$$

1次関数の変化の割合は一定であったが
関数 $y=ax^2$ では，x の値がどの値からどの値に増加するかによって，
変化の割合は異なっていて，一定ではない。

$\boxed{4}$ 関数 $y=3x^2$ について，x が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 1から4まで　　(2) 2から6まで　　(3) -4から0まで

$\boxed{5}$ 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 2から6まで　　(2) -2から6まで

◀例4▶

ジェットコースターが斜面をおり始めてから x 秒間に進む
距離を y m とするとき，$y=2x^2$ という関係が成り立つ。
次のときのジェットコースターの平均の速さ(m/s)を求めなさい。

$$(\text{平均の速さ})=\frac{(\text{進んだ距離})}{(\text{進んだ時間})}\ (\text{m/s})$$ で求めます。

(1) 1秒後から3秒後

$x=1$ のとき　$y=2$
$x=3$ のとき　$y=(\quad)$

$$\frac{\text{進んだ距離}}{\text{進んだ時間}}=\frac{[\quad]}{3-1}=[\quad]$$

(答) 8 m/s

(2) おり始めてから3秒後までの間

(答) ______ m/s

1次関数の変化の割合は一定であったが
関数 $y=ax^2$ では，x の値がどの値からどの値に増加するかによって，
変化の割合は異なっていて，一定ではない。

4 関数 $y=3x^2$ について，x が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 1から4まで　(2) 2から6まで　(3) −4から0まで

15　24　−12

5 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ について，x が次のように増加するときの変化の割合を求めよ。

(1) 2から6まで　(2) −2から6まで

−4　−2

◀例4▶

ジェットコースターが斜面をおり始めてから x 秒間に進む距離を y m とするとき，$y=2x^2$ という関係が成り立つ。
次のときのジェットコースターの平均の速さ（m/s）を求めなさい。

$$(\text{平均の速さ}) = \frac{(\text{進んだ距離})}{(\text{進んだ時間})} \ (\text{m/s})$$ で求めます。

(1) 1秒後から3秒後

$x=1$ のとき　$y=2$

$x=3$ のとき　$y=(18)$

$$\frac{\text{進んだ距離}}{\text{進んだ時間}} = \frac{[18-2]}{3-1} = [8]$$

$\frac{16}{2}$

(答) 8 m/s

(2) おり始めてから3秒後までの間

$x=0$ のとき $y=0$

$x=3$ のとき $y=18$

$\frac{18}{3}=6$

(答) 6 m/s

知っ得!

$y = ax^2$ で x が p から q まで増加するとき

変化の割合 $a(p+q)$

(例) $y = 2x^2$ で x が 1 から 4 まで増加するとき
$\underset{a}{2}$ $\underset{p}{1}$ $\underset{q}{4}$

変化の割合は $2 \times (1+4) = 10$

$\boxed{6}$ 公式を使って変化の割合を求めてみましょう。

(1) $y = 3x^2$ で xの値が次のように増加するとき　$\boxed{4}$と同じ問題です。

① 1から4　② 2から6　③ −4から0

この式の成り立ちは、次に説明があります。　3-4-2終る

$y = ax^2$ で xが pから qまで増加するとき

xの増加量は　$q - p$

yの増加量は　$aq^2 - ap^2$

これより

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{aq^2 - ap^2}{q-p} = \frac{a(q^2-p^2)}{q-p}$$

$$= \frac{a(q+p)(q-p)}{q-p}$$

約分 $q-p$ どうし

$$= a(q+p)$$

$$= a(p+q)$$

知っ得!

$y=ax^2$ で x が p から q まで増加するとき

変化の割合 $a(p+q)$

(例) $y=2x^2$ で x が 1 から 4 まで増加するとき

a　p　q

変化の割合は $2\times(1+4)=10$

$\boxed{6}$ 公式を使って変化の割合を求めてみましょう。

(1) $y=3x^2$ で xの値が次のように増加するとき　$\boxed{4}$と同じ問題です

① 1から4　② 2から6　③ −4から0

15　24　−12

この式の成り立ちは、次に説明があります。　3-4-2終了

$y=ax^2$ で x が p から q まで増加するとき

xの増加量は　$q-p$

yの増加量は　aq^2-ap^2

これより

$$\frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}=\frac{aq^2-ap^2}{q-p}=\frac{a(q^2-p^2)}{q-p}$$

$$=\frac{a(q+p)(q-p)}{q-p}$$

約分 $q-p$ どうし

$$=a(q+p)$$

$$=a(p+q)$$

補充問題

1 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=3x^2$ について，x の変域が次のときの y の変域を求めなさい。

① $-3 \leqq x \leqq -1$　　② $-2 \leqq x \leqq 3$

(2) 関数 $y=-\frac{3}{4}x^2$ で，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 4$ のときの y の変域を求めなさい。

(3) 関数 $y=ax^2$ で x の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 6$ である。a の値を求めなさい。

2 次の問いに答えなさい。

(1) $y=-2x^2$ で x の値が -3 から 0 まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

(2) $y=ax^2$ で x の値が 3 から 6 まで増加するときの変化の割合が -6 である。a の値を求めなさい。

(3) $y=ax^2$ で x の値が 3 から 5 まで増加するときの変化の割合が $y=2x+3$ の変化の割合と等しい。a の値を求めなさい。

補充問題

$\boxed{1}$ 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=3x^2$ について，xの変域が次のときの yの変域を求めなさい。

① $-3 \leqq x \leqq -1$　　② $-2 \leqq x \leqq 3$

$3 \leqq y \leqq 27$　　$0 \leqq y \leqq 27$

(2) 関数 $y=-\frac{3}{4}x^2$ で，xの変域が $-6 \leqq x \leqq 4$ のときの yの変域を求めなさい。

$-27 \leqq y \leqq 0$

(3) 関数 $y=ax^2$ で xの変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，yの変域が $0 \leqq y \leqq 6$ である．aの値を求めなさい。

$x=3$，$y=6$

$6=a \times 3^2$

$9a=6$

$a=\frac{2}{3}$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えなさい。

(1) $y=-2x^2$ で xの値が -3から0まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

6

(2) $y=ax^2$ で xの値が 3から6まで増加するときの変化の割合が -6 である．aの値を求めなさい。

$9a=-6$

$a=-\frac{2}{3}$

(3) $y=ax^2$ で xの値が 3から5まで増加するときの変化の割合が $y=2x+3$ の変化の割合と等しい。aの値を求めなさい。

$8a=2$

$a=\frac{1}{4}$